Uitwerkingen CCVW Wiskunde B 19-12-2023

Vraag 1a - 4 punten

$F_p(x) = x \cdot (\ln(px) - 1)$ geeft $F_p'(x) = 1 \cdot (\ln(px) - 1) + x \cdot [\ln(px) - 1]'$

$[\ln(px) + 1]' = \frac{1}{px} \cdot p + 0 = \frac{1}{x}$ of $[\ln(px) + 1]' = [\ln(p) + \ln(x) + 1]' = 0 + \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}$

Hieruit volgt $F_p'(x) = 1 \cdot \ln(px) - 1 + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(px) - 1 + 1 = \ln(px) = f_p(x)$

Alternatief:

$F_p(x) = x \cdot (\ln(px) - 1) = x\ln(px) - x$ geeft $F_p'(x) = 1 \cdot \ln(px) + x \cdot [\ln(px)]' - 1$

$[\ln(px)]' = \frac{1}{px} \cdot p = \frac{1}{x}$ of $[\ln(px)]' = [\ln(p) + \ln(x)]' = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$

Hieruit volgt $F_p'(x) = \ln(px) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(px) + 1 - 1 = \ln(px) = f_p(x)$

Vraag 1b - 5 punten

$g_q(\sqrt{e}) = (\sqrt{e})^q - \ln(\sqrt{e}) = \left(e^{\frac{1}{2}}\right)^q - \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = e^{\frac{1}{2}q} - \frac{1}{2}$

$g_q(\sqrt{e}) = 3\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}q} - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}q} = 4$

Dit geeft $\frac{1}{2}q = \ln(4)$, dus $q = 2\ln(4) = \ln(4^2) = \ln(16)$

Alternatief:

$g_q(\sqrt{e}) = 3\frac{1}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{e})^q - \ln(\sqrt{e}) = 3\frac{1}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{e})^q = 3\frac{1}{2} + \ln(\sqrt{e}) = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4$

Dit geeft $q = {}^{\sqrt{e}}\log(4) = \frac{\ln(4)}{\ln(\sqrt{e})} = \frac{\ln(4)}{\frac{1}{2}} = 2\ln(4) = \ln(4^2) = \ln(16)$

Vraag 1c - 5 punten

$g_4'(x) = 4x^3 - \frac{1}{x}$

$g_4'\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (\sqrt{2})^3 - \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$, dus de raaklijn een vergelijking van de vorm $y = b$

$g_4\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^4 - \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4} - \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \quad \left(= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(2)\right)$

De vergelijking van de raaklijn is zodoende $y = \frac{1}{4} - \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ ofwel $y = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(2)$

Vraag 1d - 7 punten

$g_{\frac{1}{2}}'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$

$g_{\frac{1}{2}}'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$

Te berekenen: $\int_1^4 \sqrt{x} - \ln(x)\ dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - x(\ln(x) - 1)\right]_1^4$ (*zie ook vraag a*)

$\ldots = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 - 4(\ln(4) - 1) - \left(\frac{2}{3} + 1\right) \ldots = 7\frac{2}{3} - 4\ln(4)$

Vraag 2a - 4 punten

Er is een verticale asymptoot als $n(x) = x + 3 = 0$ en $t(x) = 2x^2 + 9x + p \neq 0$

$n(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

Dit geeft $t(x) = 2 \cdot (-3)^2 + 9 \cdot (-3) + p = 18 - 27 + p = -9 + p$, dus $t(-3) = 0$ als $p = 9$.

Voor $p = 9$ heeft de grafiek van f_p dus geen verticale asymptoot, voor $p \neq 9$ heeft is er wel een verticale asymptoot (namelijk $x = -3$)

Voor $x \neq -3$ geldt $f_9(x) = \frac{2x^2+6x+3x+9}{x+3} = \frac{2x(x+3)}{x+3} + \frac{3(x+3)}{x+3} = 2x + 3$

Kan ook met een staartdeling of met $f_9(x) = \frac{(x+3)(2x+3)}{x+3} = 2x + 3$

De grafiek van de functie f_9 is dus een rechte lijn met een perforatie en heeft geen asymptoot.

Er zijn zodoende één of meer asymptoten als $p \neq 9$

Vraag 2b - 5 punten

$f_p(x) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2 + 9x + p}{x + 3} = 1 \Rightarrow 2x^2 + 9x + p = x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 + 8x + p - 3 = 0$

$D = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot (p - 3) = 64 - 8p + 24 = 88 - 8p$

De tweedegraads vergelijking heeft twee oplossingen als $D > 0 \Leftrightarrow p < 11$

Eén van deze oplossingen mag echter niet $x = -3$ zijn.

Er mag dus niet gelden

$\dfrac{-8 \pm \sqrt{88 - 8p}}{4} = -3 \Leftrightarrow -8 \pm \sqrt{88 - 8p} = -12 \Leftrightarrow \pm\sqrt{88 - 8p} = -4 \Leftrightarrow 88 - 8p = 16 \Leftrightarrow p = 9$

Er zijn dus twee snijpunten als $p < 11 \wedge p \neq 9$

Vraag 2c - 8 punten

$f_1'(x) = \dfrac{(4x + 9)(x + 3) - (2x^2 + 9x + 25)}{(x + 3)^2} \Rightarrow f_1'(1) = \dfrac{(4 + 9)(1 + 3) - (2 + 9 + 25)}{(1 + 3)^2} = \dfrac{13 \cdot 4 - 36}{4^2} = 1$

De straal van de cirkel door $A(1,9)$ heeft dus als vergelijking $y = -x + 10$

Het middelpunt M van de cirkel is het snijpunt van deze lijn en de lijn $y = 2x + 1$

$-x + 10 = 2x + 1 \Leftrightarrow -3x = -9 \Leftrightarrow x = 3$, M is dus het punt $(3,7)$

De straal van de cirkel is $d(A, M) = \sqrt{(3 - 1)^2 + (7 - 9)^2} = \sqrt{8}$

Een vergelijking van de cirkel is zodoende $(x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 8$

Vraag 2d - 8 punten

$d(P, Q) = \sqrt{(7 - 1)^2 + (9 - 1)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$, dus de straal van c_2 is 5

De oppervlakte van c_2 is dus $\pi \cdot 5^2 = 25\pi$. De oppervlakte van c_3 is dan $0{,}64 \cdot 25\pi = 16\pi$.

Voor de straal r van c_3 geldt dus $\pi r^2 = 16\pi \Leftrightarrow r^2 = 16 \Leftrightarrow r = 4$

Het middelpunt M van c_3 ligt zodoende op de lijn PQ op afstand 4 van punt P

Samen met $d(P, Q) = 10$ geeft dit:

$x_M = \frac{4}{10}\left(x_Q - x_P\right) + x_P = \frac{2}{5} \cdot 6 + 1 = 3\frac{2}{5}$ en $y_M = \frac{4}{10}\left(y_Q - y_P\right) + y_P = \frac{2}{5} \cdot 8 + 1 = 4\frac{1}{5}$

Kan ook door het snijpunt van $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$ *en* $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ *te berekenen.*

Een vergelijking van c_3 is zodoende $\left(x - 3\frac{2}{5}\right)^2 + \left(y - 4\frac{1}{5}\right)^2 = 16$

Vraag 3a - 5 punten

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{1}{4}x\right) = -\sin\left(\frac{1}{4}x\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{1}{4}x\right) = \sin\left(-\frac{1}{4}x\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{1}{4}x\right) = \cos\left(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\pi\right)$

Dit geeft $\frac{1}{4}x = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{4}x = -\left(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\pi\right) + k \cdot 2\pi$

$\frac{1}{4}x = -\left(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\pi\right) + k \cdot 2\pi = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ heeft geen oplossingen.

$\frac{1}{4}x = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = -\pi + k \cdot 4\pi$

De oplossingen op het interval $0 \leq x \leq 16\pi$ zijn $x = 3\pi$, $x = 7\pi$. $x = 11\pi$ en $x = 15\pi$

Vele varianten mogelijk, bijvoorbeeld

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{1}{4}x\right) = -\sin\left(\frac{1}{4}x\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{1}{4}x\right) = \sin\left(\frac{1}{4}x + \pi\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{4}x + \pi\right)$

Dit geeft $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{4}x + \pi + k \cdot 2\pi$ (geen oplossingen)

of $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\pi = \pi - \left(\frac{1}{4}x + \pi\right) + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ (met dezelfde oplossingen als hierboven)

Alternatief 1:

Uit de exacte-waarden-cirkel volgt $\sin(A) = -\cos(A) \Leftrightarrow A = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$

Dit geeft $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi \Leftrightarrow x = 3\pi + k \cdot 4\pi$

De oplossingen op het interval $0 \leq x \leq 16\pi$ zijn $x = 3\pi$, $x = 7\pi$. $x = 11\pi$ en $x = 15\pi$

Alternatief 2:

Maak eerst vraag b en leid daaruit af: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(f(x)\right)^2 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{1}{2}x\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = -\pi + k \cdot 4\pi$

De oplossingen op het interval $0 \leq x \leq 16\pi$ zijn $x = 3\pi$, $x = 7\pi$. $x = 11\pi$ en $x = 15\pi$

Vraag 3b - 3 punten

$\left(f(x)\right)^2 = \left(\cos\left(\frac{1}{4}x\right) + \sin\left(\frac{1}{4}x\right)\right)^2 = \cos^2\left(\frac{1}{4}x\right) + 2\cos\left(\frac{1}{4}x\right)\sin\left(\frac{1}{4}x\right) + \sin^2\left(\frac{1}{4}x\right)$

$\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A)$ geeft $2\cos\left(\frac{1}{4}x\right)\sin\left(\frac{1}{4}x\right) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

Dit geeft

$\left(f(x)\right)^2 = \cos^2\left(\frac{1}{4}x\right) + \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \sin^2\left(\frac{1}{4}x\right) = \cos^2\left(\frac{1}{4}x\right) + \sin^2\left(\frac{1}{4}x\right) + \sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 1 + \sin\left(\frac{1}{2}x\right) = g(x)$

Vraag 3c - 5 punten

$\pi \cdot \int_0^{3\pi} \left(f(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^{3\pi} 1 + \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \, \mathrm{d}x = \pi \cdot \left[x - 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right]_0^{3\pi}$

$= \pi \cdot \left(3\pi - 2\cos\left(1\frac{1}{2}\pi\right) - (0 - 2 \cdot \cos(0))\right) = \pi \cdot (3\pi - 0 - 0 + 2) = 3\pi^2 + 2\pi$

Vraag 3d - 6 punten

$h'(x) = -\sin(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; h'\left(\frac{1}{4}\pi^2\right) = -\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) \cdot \frac{-1}{2 \cdot \frac{1}{2}\pi} = -1 \cdot \frac{1}{\pi} = -\frac{1}{\pi}$

De raaklijn aan de grafiek van h in punt $A(\frac{1}{4}\pi^2, 0)$ heeft dus de vergelijking

$y = -\frac{1}{\pi}\left(x - \frac{1}{4}\pi^2\right) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\pi}x + \frac{1}{4}\pi$

We zoeken dus de oppervlakte van de driehoek met hoekpunten $A\left(\frac{1}{4}\pi^2, 0\right)$,

$O(0,0)$ en $B\left(0, \frac{1}{4}\pi\right)$

Deze oppervlakte is $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\pi^2 \cdot \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{32}\pi^3$

Vraag 4a - 6 punten

$f'(x) = 4\mathrm{e}^{-x^2+4x-4} \cdot (-2x+4)$; $f''(x) = 4\mathrm{e}^{-x^2+4x-4} \cdot (-2x+4) \cdot (-2x+4) + 4\mathrm{e}^{-x^2+4x-4} \cdot (-2)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (-2x+4)^2 - 2 = 0$

Dit geeft $(-2x+4)^2 = 2 \Leftrightarrow -2x+4 = \sqrt{2} \vee -2x+4 = -\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee x = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$

of $4x^2 - 16x + 16 - 2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 16x + 14 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{32}}{8}$

Vraag 4b - 6 punten

$f'(x) = 4\mathrm{e}^{-x^2+4x-4} \cdot (-2x+4)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4\mathrm{e}^{-x^2+4x-4} \cdot (-2x+4) = 0 \Leftrightarrow -2x+4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$ Dit geeft $f(2) = 4\mathrm{e}^0 = 4 \cdot 1 = 4$

$g'(x) = 2\mathrm{e}^{3x+3} \cdot 3 - 3\mathrm{e}^{2x+2} \cdot 2 = 6\mathrm{e}^{3x+3} - 6\mathrm{e}^{2x+2}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x+3} = \mathrm{e}^{2x+2} \Leftrightarrow 3x+3 = 2x+2$

Dit geeft $x = -1$ en $g(-1) = 2 \cdot \mathrm{e}^0 - 3 \cdot \mathrm{e}^0 = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 2 - 3 = -1$

Een richtingsvector voor de lijn door $A(2,4)$ en $B(-1,-1)$ is $\begin{pmatrix} 2+1 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Een vectorvoorstelling van deze lijn is dus $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ of $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Vraag 4c - 4 punten

$h'(x) = 2^x \cdot \ln(2)$; $k'(x) = 3^x \cdot \ln(3)$

$h'(3) = 2^3 \cdot \ln(2) = 8\ln(2)$; $k'(2) = 3^2 \cdot \ln(3) = 9\ln(3)$

Vervolg met tangens:

$\tan^{-1}(8\ln(2)) \approx 79{,}78°$; $\tan^{-1}(9\ln(3)) \approx 84{,}22°$

De hoek tussen ℓ en *m* is dus (afgerond) $84{,}22° - 79{,}78° \approx 4{,}4°$

Vervolg met cosinusformule:

$$\cos(\angle(\ell, m)) = \frac{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 8\ln(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 9\ln(3) \end{pmatrix}\right)}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 8\ln(2) \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 9\ln(3) \end{pmatrix}\right|} = \frac{1 + 72 \cdot \ln(2) \cdot \ln(3)}{\sqrt{1 + (8\ln(2))^2} \cdot \sqrt{1 + (9\ln(3))^2}}$$

Dus $\angle(\ell, m) = \cos^{-1}\left(\frac{1 + 72 \cdot \ln(2) \cdot \ln(3)}{\sqrt{1 + (8\ln(2))^2} \cdot \sqrt{1 + (9\ln(3))^2}}\right) \approx \cos^{-1}(0{,}99699) \approx 4{,}4°$

